Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Klausuren Mathematik für die Jahrgangsstufe 13 im kostengünstigen Paket

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

Thema:	**Mündliche Abiturprüfung – Grundkurs** **- Stochastik** **- Analysis**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	• Verlauf einer mündlichen Abiturprüfung • Prüfungszeit: ca. 60 min
Übersicht über die Teile	• Schriftlicher Teil • Mündlicher Teil einschließlich Lösungen
Information zum Dokument	Ca. 10 Seiten, Größe ca. 197 Kbyte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

IM FOLGENDEN ist eine mündliche Abiturprüfung im Fach Mathematik skizziert.

Der **schriftliche Teil** besteht in unserem Beispiel aus der schriftlichen Lösung einer Aufgabe zum Thema ***Stochastik***. Anschließend werden die Ergebnisse in Form eines *Kurzvortrages* präsentiert.

Im **mündlichen Teil** werden zuerst einige Fragen zum Kurzvortrag gestellt. Danach findet ein ausführliches Prüfungsgespräch zum zweiten Prüfungsthema ***Analysis*** statt.

Die **Lösungen** des schriftlichen Teils sind in den Kurzvortrag des Schülers mit integriert und gelb unterlegt.

SCHRIFTLICHER TEIL (ca. 30 min):

Aufgaben zum Thema STOCHASTIK:

1. Auf einem Tisch liegen verdeckt 6 Kärtchen mit den Buchstaben a, b, i, r, t, u. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort „Abitur“ durch Ziehen aller 6 Kärtchen ohne Zurücklegen zu erzeugen, wenn die Kärtchen in der Reihenfolge der Ziehung nebeneinander gelegt werden sollen? Um welche Art Stichprobe handelt es sich?

2. Auf einem Tisch liegen verdeckt 26 Kärtchen mit den Buchstaben des Alphabets. Sie ziehen zufällig 6 Kärtchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass Sie die 6 Buchstaben a, b, i, r, t, u gezogen haben?
b) dass Sie die Buchstaben aus a) in der Reihenfolge a-b-i-t-u-r gezogen haben?
c) Um welche Art Stichprobe handelt es sich bei a) bzw. b)?

3. Ein Spieler benutzt einen „gezinkten“ Würfel. Den Gewinnplan des Spiels und die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Würfels entnehmen sie der Tabelle:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Gewinn in DM	– 4	2	– 4	2	– 4	6
P(gezinkt)	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3
P(ideal)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler bei Benutzung des gezinkten Würfels gewinnt (verliert)?
b) Der Spieler hat mit dem gezinkten Würfel eine gerade Zahl gewürfelt (Ereignis A). Wie groß ist unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine 6 (4, 2) handelt?
c) Wie hoch ist bei der Durchführung einer großen Anzahl von Spielen
   i) der durchschnittlich zu erwartende Gewinn (bzw. Verlust) pro Spiel bei Benutzung des gezinkten Würfels?
   ii) der durchschnittlich zu erwartende Gewinn (bzw. Verlust) pro Spiel, wenn der Spieler einen idealen Würfel benutzen würde?

Vortrag des Schülers

Prüfer: Bitte erläutern Sie uns Ihre Ergebnisse aus dem schriftlichen Teil in Form eines kurzen Vortrages.

Schüler: In **Aufgabe 1** handelt es sich um eine geordnete Vollerhebung, da alle 6 Kärtchen ohne Zurücklegen gezogen werden. Die Anzahl aller möglichen geordneten Vollerhebungen und damit aller möglichen Wörter, die aus den Buchstaben a, b, i, r, t, u bestehen, ist 6! = 720. Die Wahrscheinlichkeit, das Wort „Abitur" zu treffen ist damit: $P = 1 : 720 = 1{,}39 \cdot 10^{-3}$

In **Aufgabe 2a)** sollen 6 aus 26 Kärtchen gezogen werden, ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. D.h. es handelt sich um eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen (**2c**). Die Anzahl der Möglichen Ereignisse ist in diesem Fall gleich $\binom{n}{k} = \binom{26}{6}$.

Wir erhalten also $\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{26!}{6!\,20!} = 230230$ ungeordnete Kombinationen aus 6 Buchstaben. Die Wahrscheinlichkeit, die Buchstaben a, b, i, r, t, u zu ziehen ist damit:
$P = 1 : 230230 = 4{,}34 \cdot 10^{-6}$.

In **Aufgabe 2b)** wird der gleiche Versuch unter Berücksichtigung der Reihenfolge der Buchstaben durchgeführt. Es handelt sich also um eine geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen (**2c**). Unter diesen Umständen gibt es $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{26!}{20!} = 165\,765\,600$ geordnete Kombinationen aus 6 Buchstaben. Die Wahrscheinlichkeit, die Reihenfolge a-b-i-t-u-r zu treffen ist demnach: $P = 1 : 165\,765\,600 = 6{,}03 \cdot 10^{-9}$.

Der Spieler in **Aufgabe 3a)** gewinnt, wenn er eine gerade Zahl würfelt, d.h. wenn Ereignis A eintritt. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller geraden Zahlen bei Benutzung des gezinkten Würfels:
$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$.
Er verliert, wenn das Ereignis $\overline{A}$ „ungerade Zahl" eintritt, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit:
$P(\overline{A}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4$

In **Aufgabe 3b)** ist nach der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Zahl 6 unter der Bedingung, dass eine gerade Zahl mit dem gezinkten Würfel gewürfelt wurde, gefragt. Man muss also die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $P_A(B)$ berechnen; wobei A für das Ereignis „gerade Augenzahl" und B für das Elementarereignis „Augenzahl = 6" steht. Es gilt demnach A = {2, 4, 6} und B = {6}. $P_A(B)$ berechnet man mit der folgenden Gleichung:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5.$$

$P(A \cap B)$ bedeutet $P(\{2, 4, 6\} \cap \{6\})$ und das ist gleich $P(\{6\}) = 0{,}3$, wie man der Tabelle entnimmt.
Mit den entsprechenden Rechnungen erhält man für die bedingte Wahrscheinlichkeit der Ereignisse {4} bzw. {2}:

$$P_A(\{4\}) = \frac{0{,}2}{0{,}6} = 0{,}333 \text{ und } P_A(\{2\}) = \frac{0{,}1}{0{,}6} = 0{,}167.$$

In **Aufgabe 3c)i)** ist nach dem *Erwartungswert* E(X) des durchschnittlichen Gewinns pro Spiel bei Benutzung des gezinkten Würfels gefragt. Die möglichen Gewinne sind:
$x_1 = -4$; $x_2 = 2$; $x_3 = 6$. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich durch Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten:
$P(X = x_1) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4$; $P(X = x_2) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$; $P(X = x_3) = 0{,}3$.
Den Erwartungswert erhalten wir aus der Beziehung:
$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3) = -4 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}3 = 0{,}8$
Der Spieler würde also bei der Durchführung einer großen Anzahl von Spielen durchschnittlich 0,80 DM pro Spiel gewinnen.

In **Aufgabe 3c)ii)** haben wir die gleichen möglichen Gewinne wie in 3c)i), die Wahrscheinlichkeiten bei Benutzung des idealen Würfels ändern sich jedoch:
$P(X = x_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$; $P(X = x_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$; $P(X = x_3) = \frac{1}{6}$.
Und wir erhalten den Erwartungswert:
$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3) = \frac{-4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{6} = -0{,}33$
Mit einem idealen Würfel würde der Spieler also durchschnittlich 0,33 DM pro Spiel verlieren.

MÜNDLICHER TEIL (ca. 30 min):

Fragen zum Vortrag:

Prüfer: Vielen Dank für Ihren gelungenen Vortrag. In Aufgabe 1 ging es um eine geordnete Vollerhebung. Da handelt es sich ja um einen Spezialfall. Wissen Sie wovon?

Schüler: Eine geordnete Vollerhebung ist ein Spezialfall einer geordneten Stichprobe ohne zurücklegen. Bei der Vollerhebung werden im Unterschied zur Stichprobe alle vorhandenen Elemente entnommen.

Prüfer: Ja genau. In Aufgabe 2a) geht es um eine ungeordnete Stichprobe ohne zurücklegen. Kennen Sie hierzu ein Beispiel aus dem täglichen Leben?

Schüler: Ja. Das Lottospiel „6 aus 49“. Es werden 6 aus 49 Kugeln ohne zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen.

Prüfer: Ja, ein klassisches Beispiel. Rechnen Sie doch bitte mit Ihrem Taschenrechner die Anzahl der möglichen Ausgänge aus.

Schüler (rechnet und kommentiert): dazu muss ich „49 über 6“ berechnen, d.h. $\frac{49!}{6!\,43!}$. Ich erhalte 13 983 816 Möglichkeiten.

Prüfer: Richtig. Das heißt einer von rund 14 Millionen abgegebenen Lottotipps ist ein Hauptgewinn, vorausgesetzt jeder Tipp kommt nur einmal vor. Nun hatten Sie in Ihrem Vortrag 3 Typen von Stichproben erwähnt. Fällt Ihnen noch ein bislang unerwähnter Typ ein?

Thema:	**Abiturklausur: Analysis, Stochastik, Vektor-rechnung.**
TMD: 3927	
Kurzvorstellung des Materials:	• Das vorliegende Material stellt eine Mathe-Leistungskurs-Abitur-Vorbereitungsklausur der Klasse 13 dar. Veranschlagte Zeit: ca. 4,25 Stunden. Mit Lösungen. • So probt man den Ernstfall optimal !
Übersicht über die Teile	• Aufgabe 1: (Analysis): Diskussion einer e-Funktion, Newton-Verfahren, Regeln von l´Hospital, Partielle Integration, Rotationsverfahren. • Aufgabe 2: (Stochastik): Binominalverteilung, Bernoulli-Kette, Satz von Bayes, einseitiger Test zu einer unbekannten Wahrscheinlichkeit, Beta-Fehler. • Aufgabe 3: (Vektorrechnung): lineare Unabhängigkeit, Orthogonalität, Parallelität, Pyramide, Schwerpunkt eines Dreiecks.
Information zum Dokument	Ca. 8 Seiten, Größe ca. 133 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ⬧ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Mathematik LK Vorklausur (Zeit: 4,25 Std.)

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 10\cdot x\cdot e^{-x} - 1$ und D = R. Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuchen Sie K auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten.

b) Berechnen sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens die beiden Schnittpunkte von K mit der x-Achse auf 4 Dezimalen genau und zeichnen Sie K im Bereich $0 \leq x \leq 6$ (LE = 2cm).

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Kurve K und ihre Asymptote im 1. und 4. Quadranten einschließen.

d) Lässt man die Fläche, die von der Kurve K und den Geraden zu x = 0, x = 10 und y = -1 eingeschlossen wird, **um die Gerade zu y = -1 rotieren,** so entsteht ein Drehkörper. Berechnen Sie sein Volumen.

Aufgabe 2:

Die Apfellieferungen, die ein Großhändler vom Produzenten A bezieht, enthalten nach längerer Erfahrung 8% verdorbene Früchte. Der Großhändler entnimmt einer neuen Großsendung eine Stichprobe von 10 Äpfeln.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 2, höchstens 2, mindestens 3 verdorbene Äpfel?

b) Wie viele Äpfel sollte er mindestens prüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% einen verdorbenen Apfel zu erwischen?

c) Neben den Äpfeln von A bezieht der Großhändler auch Sendungen vom Produzenten B, die in der Regel nur 6% Ausschussäpfel enthalten. Von B bekommt er die doppelte Menge Äpfel geliefert wie von A. Die Apfellieferungen sind vermischt an Einzelhändler weitergegeben worden. Es werden 5 verdorbene Äpfel reklamiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammen zwei aus der Lieferung von A und drei von B?

d) Der Großhändler installiert Verpackungsmaschinen, die jeweils Äpfel von einem Produzenten in Beuteln zu 20 Stück abpacken. Aus dem Gesamtsortiment greift man zufällig eine Packung heraus, welche 2 verdorbene Früchte enthält. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ihr Inhalt von A geliefert?

e) Der Großhändler hat in der letzten Zeit das Gefühl, dass sich überdurchschnittlich viele verdorbene Äpfel in den Lieferungen von B befinden. Liegt die Ausschussquote höher als 6% so muss der Produzent B einen Preisnachlass gewähren. Eine Stichprobe soll Aufschluss ergeben. Falls man aufgrund des Ergebnisses einen Ausschussanteil von mindestens 5% erwarten kann, soll die ganze Wagenladung untersucht werden, sonst nicht.

(i) Es werden 200 Äpfel der Wagenladung zufällig entnommen und geprüft. Bestimmen Sie den Annahmebereich für die Hypothese: „Der Ausschussanteil beträgt mindestens 5%.“, wenn eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% in Kauf genommen wird.

(ii) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irrtümlich die ganze Wagenladung untersucht wird, obwohl der Ausschussanteil 3% beträgt, wenn die Entscheidungsregel lautet: Die Hypothese H_o soll genau dann abgelehnt werden, wenn höchstens 4 Äpfel verdorben sind.

Aufgabe 3:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(-1/1/-1), B_t(-1/2/2t + 1) und

C_t(5/3t + 1/-1) für $t \in R$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Ortsvektoren der Punkte A, B_t und C_t für jedes $t \in R$ linear unabhängig sind.

   Untersuchen Sie, ob es ein $t \in R$ gibt, für das die Ortsvektoren der Punkte A, B_t und C_t paarweise orthogonal sind.

b) Die Ebene E_t geht durch A, B_t und C_t . Geben Sie eine Koordinatengleichung von E_t an. Für welche t ist E_t parallel zu mindestens einer Koordinatenachse?

   Für welche t ist E_t parallel zu einer Koordinatenebene?

c) Die Punkte 0, A, B_t und C_t sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide. Berechnen Sie für t = 1 ihr Volumen.

d) S_t sei der Schwerpunkt des Dreiecks AB_tC_t.

   Gibt es ein t, für das die Gerade $0S_t$ senkrecht auf der Pyramidenfläche AB_tC_t steht?

SCHOOL-SCOUT:	**Mathe**
Thema: **TMD: 2402**	**Klausur: Nullstellen ganz-rationaler Funktionen; spezielle Funktionen; Steigung einer Kurve in einem Punkt (Grenzwert des Differenzenquotienten)**
Kurzvorstellung des Materials:	Lehrer fragen häufig nach einsatzbereiten Klausuren, um sich viel Zeit zu ersparen. Dieses Material beinhaltet eine 2-stündige Klausur für die 11 Klasse. Die Klausur ist dreiteilig und bezieht sich auf die Themenfelder „Nullstellen“ und „Steigungen“. Sie kann mit Hilfe von Microsoft Word sofort ausgedruckt oder beliebig verändert werden. Musterlösungen helfen bei der Erstellung des Erwartungshorizontes Aufgabe 1 : Bestimmung der Nullstellen von Funktionen 4. Grades Aufgabe 2 : Zeichnung von Funktionen Aufgabe 3 : Berechnung der Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 mittels des Differenzenquotienten Lösungen
Information zum Dokument	• Ca. 6 Seiten, Größe ca. 60 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Fax: 02501/26048 ♦ E-Mail: info@School-Scout.de Internet: http://www.School-Scout.de

Klausur

Thema: Nullstellen ganz-rationaler Funktionen; spezielle Funktionen; Steigung einer Kurve in einem Punkt (Grenzwert des Differenzenquotienten)

Aufgabe 1:

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 4x + 12$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x^3 + 15x^2$

c) $f(x) = -x^4 + 68x^2 - 256$

Aufgabe 2:

Skizziere die Graphen folgender Funktionen im Bereich [-4 ; 4]:

a) $f(x) = x + [x]$

b) $f(x) = \sqrt{|x|}$

c) $f(x) = x - |x|$

Aufgabe 3:

Berechne jeweils die Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 mit Hilfe des Grenzwertes des Differenzenquotienten:

a) $f(x) = x^2 + x - 4$; $x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$; $x_0 = 3$

Thema:	**Arbeitsblatt zu Grenzwert, Nullstellen und Polynomdivision**
TMD: 297	
Kurzvorstellung des Materials:	Schüler benötigen ausreichend Übungsmaterialien zu den grundlegenden Themenfeldern der Analysis in der Oberstufe. Dieses Material bietet jeweils eine Übungsaufgabe zu den Themen „Grenzwerte“, „Definitionsmenge“, „Nullstellen“ und „Polynomdivision“. Die anschließenden Musterlösungen bestätigen oder berichtigen die Schüler.
Übersicht über die Teile	• 4 Aufgaben : Grenzwertermittlung Bestimmung der Definitionsmenge Bestimmung von Nullstellen Anwendung der Polynomdivision • Lösungen
Information zum Dokument	• Ca. 4 Seiten, Größe ca. 97 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Arbeitsblatt zu Grenzwert, Nullstellen und Polynomdivision

a) Grenzwerte

Ermittle jeweils den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ zur Stelle x_0.

(1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$; $x_0 = -2$

(2) $f(x) = (x+4)^2$; $x_0 = -3$

(3) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; $x_0 = 4$

b) Definitionsmengen

Bestimme den Definitionsbereich des Terms:

(1) $\sqrt{x^2-9}$

(2) $\sqrt{x^3+1}$

(3) $\sqrt{\frac{5}{(2-x)^2}}$

(4) $\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}$

c) Nullstellen

Bestimme jeweils die Nullstellen der Funktionen

(1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

(2) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

(3) $f(x) = x^4 - 9x^2 + 20$

(4) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ (5) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

d) Polynomdivision
Beispiel: Es sollen die Nullstellen bestimmt werden von $x^3 + x^2 - 10x + 8$.

Durch Probieren ergibt sich, dass 1 Nullstelle des Terms ist. Daher kann man

den Linearfaktor $(x – 1)$ abspalten:

$(x^3 + x^2 - 10x + 8) : (x – 1) = x^2 + 2x – 8$

$\underline{-(x^3 + x^2)}$

$2x^2 - 10x$

$\underline{-(2x^2 - 2x)}$

$- 8x + 8$

$\underline{-(- 8x + 8)}$

0

Löse ebenso: (1) $(x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 4x + 12) : (x – 1) =$

(2) $(x^3 - 3x^2 - 16x – 12) : (x+1) =$

(3) $(x^4 - 1{,}7x^3 - 1{,}9x^2 + 2x + 1{,}2) : (x – 2) =$

Thema:	**Mathe-LK-Klausur Stufe 13**
TMD: 27196	
Kurzvorstellung des Materials:	• Kombinatorik, Stochastische Matrizen, vollständige Induktion
Übersicht über die Teile	• 3 umfangreiche Aufgaben zu den Themen • Lösungen zu den Aufgaben
Information zum Dokument	Ca. 14 Seiten, Größe ca. 162 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

AUFGABE 1: Flohfamilie

In einem nicht sehr großen Aquarium (40 Liter) lebt eine Flohfamilie, die beim ersten Befüllen des Aquariums aus 10.000 Flöhen besteht. Die Flöhe vermehren sich mit einer Wachstumsrate von 20% ihres Bestandes f(t) und es passen maximal 10.000.000 Flöhe in das Aquarium.

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für den vorliegenden Sachverhalt auf, begründen Sie, welche Annahmen zu dem von Ihnen gewählten Modell führen und lösen Sie die Differentialgleichung.

Ersatzlösung: $f(t) = \dfrac{10.000.000 * e^{\frac{t}{5}}}{e^{\frac{t}{5}} + 999}$

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktionsgleichung f(t) die oben gestellten Bedingungen (erstes Befüllen 10.000, max. 10.000.000 Flöhe) erfüllt.

c) Die Flöhe sondern Exkremente ab (1000 Flöhe pro Stunde 0,001mg). Wie viel Exkremente werden sich in den ersten 24 Stunden im Aquarium ansammeln?

d) Dem Aquarium wird ständig pro Stunde 2 Liter Frischwasser zugeführt, gleichzeitig fließt die entsprechende Menge altes Wasser ab. Das Frischwasser ist auch nicht „flohfrei", die 2 Liter enthalten 400 Flöhe. Die sensiblen Flöhe sind von der neuen Situation so verwirrt, dass sie sich nicht mehr vermehren. Begründen Sie, warum sich der Flohbestand gemäß der folgenden Differentialgleichung entwickelt:

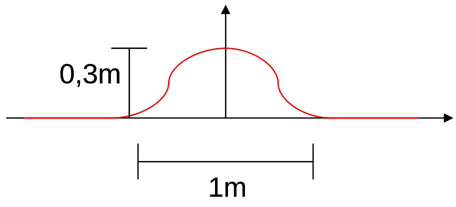
$$f_{Neu}'(t) = 400 - \frac{2}{40} f_{Neu}(t)$$

e) Wie viele Flöhe wurden in den ersten 24 Stunden mit dem alten Wasser aus dem Aquarium entfernt?

AUFGABE 2: Minigolfbahn

Nachdem sich die Besucher einer Minigolfbahn in den letzten Wochen zunehmend beim Besitzer beschwert haben, dass der Ball bei der abgebildeten Bahn beim Übergang von der geraden Strecke zum Hügel anfängt zu springen, wurden Sie gebeten einen Entwurf für eine Bahn mit einem möglichst Perfekten Übergang zu erstellen.

Der Besitzer fordert, dass das Loch genau in der Mitte des Hügels 0,3m erhöht über der flachen Bahn liegt und der Hügel insgesamt 1m breit ist. Nach einem Fehlschlag muss man von der anderen Seite weiterspielen können.



a) Welche Bedingungen muss ihre Bahn erfüllen, damit der Übergang möglichst glatt wird? Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion, die diese Bedingungen erfüllt.

Ersatzlösung: $f(x) = -\frac{96}{5}x^6 + \frac{72}{50}x^4 - \frac{18}{5}x^2 + \frac{3}{10}$

b) Ein anderer Vorschlag für die Modellierung sieht folgende Funktion für den entsprechenden Bereich vor (Koordinatenachsen s. Skizze):

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1024}{45}x^6 + \frac{256}{15}x^4 - \frac{64}{15}x^2 + \frac{16}{45} & \textit{für}: x < -0,25 \\ -\frac{12}{5}x^2 + \frac{3}{10} & \textit{für}: -0,25 \le x \le 0,25 \\ -\frac{1024}{45}x^6 + \frac{256}{15}x^4 - \frac{64}{15}x^2 + \frac{16}{45} & \textit{für}: x > 0,25 \end{cases}$$

Zeichnen Sie beide Funktionen in ein Koordinatensystem. Betrachten Sie den Grad der Funktion g und begründen Sie, ob die Funktion die von ihnen gestellten Bedingungen aus a) erfüllen kann. Falls dies nicht der Fall ist, geben Sie an, welchen Grad die Abschnitte haben müssen.

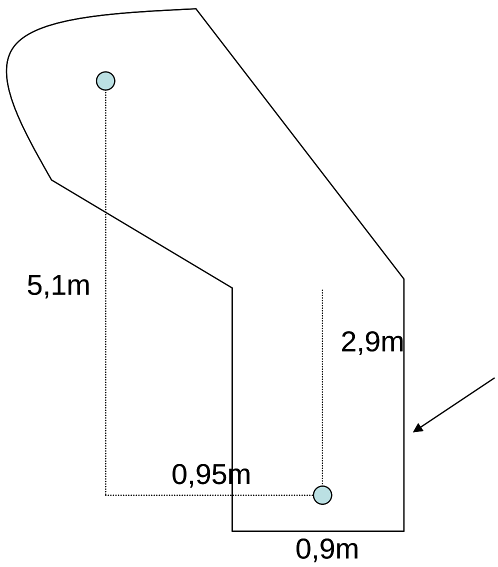
c) Vergleich der beiden Vorschläge:

(1) Bestimmen Sie für beide Bahnen jeweils die Stelle, an der sie am steilsten verläuft. Welche der beiden Bahnen weist die größte Steigung auf.

(2) Die Materialkosten für beide Bahnen sollen anhand der Oberfläche (muss mit einer teuren Schicht überzogen werden) und dem Volumen des Hügels (soll im Gegensatz zum Bild vollständig gefüllt werden) abgeschätzt werden. Die Minigolfbahn ist 0,9m breit.

Bestimmen Sie für beide Modelle die Oberfläche und das Volumen. Liefern die Differenzen ein entscheidendes Argument für die Entscheidungsfindung?

d) Bei der Besichtigung der Minigolfanlage fällt ihre Aufmerksamkeit auch auf die abgebildete Bahn. Zeigen Sie rechnerisch, dass ein Einlochen mit einem Schlag ohne Benutzung der Bande nicht möglich ist.



e) Voller Bewunderung beobachten Sie die Minigolfprofis, die den Ball mit einem Schlag einlochen, indem sie ihn unten rechts an die Bande schlagen (s.Pfeil). Bestimmen Sie die Stelle, an dem der Ball die Bande treffen muss, so dass er nach der Reflektion direkt ins Loch rollt. Gehen Sie davon aus, dass der Winkel zwischen Bande und Bahn des Balles vorher und nachher gleich groß ist.

Thema:	**Mathe-LK-Klausur Stufe 13**
TMD: 27195	
Kurzvorstellung des Materials:	• Kombinatorik, Stochastische Matrizen, vollständige Induktion
Übersicht über die Teile	• 3 umfangreiche Aufgaben zu den Themen • Lösungen zu den Aufgaben
Information zum Dokument	Ca. 11 Seiten, Größe ca. 167 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

AUFGABE 1: Kombinatorik

1.1 Mittwochslotto (In einer Zeitschrift war im Januar 1983 folgender Artikel zu lesen:)

Das „Mittwochslotto" ist ins Gerede gekommen…

Mysteriös sind die Zahlenkombinationen, die da ausgekugelt werden. Allzuhäufig sind unter den Gewinnzahlen so genannte Pärchen oder Drillinge: zwei bzw. drei aufeinanderfolgende Zahlen. Bei den bisher ausgewerteten 39 Spieltagen kam es an 28 Tagen zu diesen Zahlenkombinationen: 17mal mit einem Pärchen; 4mal mit zwei Pärchen; 2mal mit einem Drilling; 4mal mit einem Drilling und einem Pärchen und einmal ein Vierer und ein Pärchen.

Beim Mittwochslotto wurden 7 Zahlen aus 38 ohne zurücklegen gezogen.

a) Wie viele mögliche Kombinationen gibt es? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 7 Richtige?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Kombination ohne Pärchen, Drillinge,…? (Tipp: Jede gezogene Zahl muss dann zwischen zwei nicht gezogenen Zahlen liegen.)

1.2 Weihnachtslotterie

Es werden Lose verkauft. Der Losverkäufer wirbt damit, dass mehr als die Hälfte der Lose gewinnen: 35% gewinnen 1€, 10% gewinnen 2€, 5% gewinnen 5€, 1,5% gewinnen 10€ und 0,5% gewinnen 100€.

a) Wie hoch ist der durchschnittlich erwartete Gewinn?

b) Unter welchen Voraussetzungen kann man die Lotterie als Bernoulli-Versuch ansehen?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das bei 5 gezogenen Losen das 5. Los ein Gewinnlos ist?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 5 Losen 5 Nieten zu ziehen?

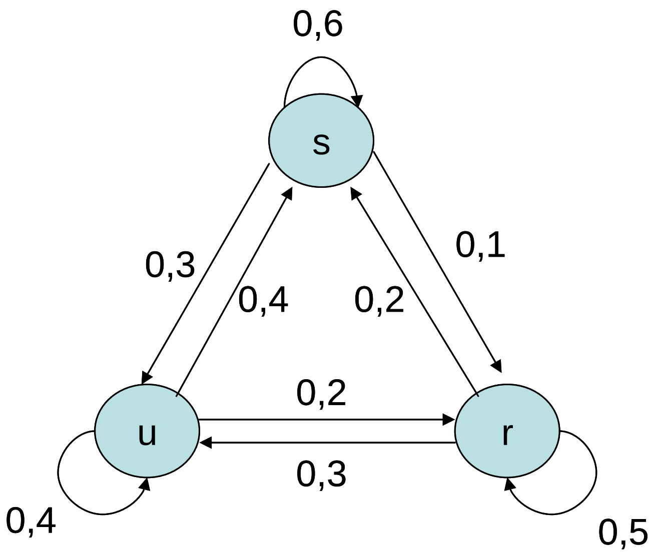
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 5 Losen genau 2 Gewinne zieht?

E-Mail: info@School-Scout.de ⬩ Internet: http://www.School-Scout.de ⬩ Fax: 02501/26048
Linckensstr. 187 ⬩ 48165 Münster

AUFGABE 2: Stochastische Matrizen

2.1 Wetterprognosen

Die Meteorologen der Gemeinde R. haben aus langjährigen Beobachtungen den abgebildeten Übergangsgraphen entwickelt. Sie unterscheiden sonniges (s), regnerisches (r) und unbeständiges (u) Wetter.



a) Beschreiben Sie die in dem Übergangsgraphen enthaltenen Informationen in Worten. Wählen Sie dazu exemplarisch Zahlen aus.

b) Der heutige Tag ist sonnig. Geben Sie einen Wetterbericht für morgen und übermorgen an. Bestimmen Sie die Werte mit Hilfe eines Baumdiagramms.

c) Sie sollen für die Gemeinde R. einen Werbeprospekt erstellen, in dem Sie eine langfristige Wetterprognose aufnehmen sollen. Welche Werte können Sie in dem Prospekt angeben.

d) Begründen Sie, warum für beliebige Anfangsverteilungen von s, r und u eine identische langfristige Prognose entsteht.

e) Sie möchten sich die Verhältnisse vor Ort genauer anschauen. Am Tag Ihrer Anreise hören Sie den Wetterbericht vom Lokalsender: P(s)=0,5, P(u)=0,35 und P(r)=0,15. Wie war das Wetter an ihrem Anreisetag?

2.2 Zahlungsmoral

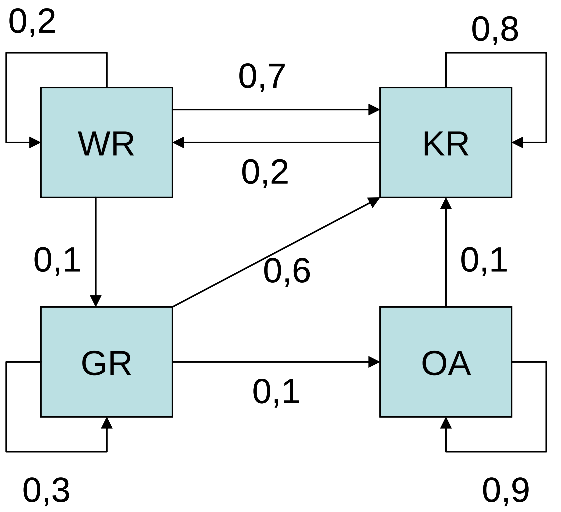
Eine Telefongesellschaft unterscheidet insgesamt zwischen vier Gruppen von Haushalten:

Gruppe KR: Kunden, die immer pünktlich zahlen→kein Zahlungsrückstand

Gruppe WR: Kunden mit wenig Zahlungsrückstand

Gruppe GR: Großer Zahlungsrückstand →Telefonanschluss befristet gesperrt

Gruppe OA: Haushalte ohne Anschluss



Erfahrungsgemäß verändert sich das Zahlungsverhalten am Ende eines Quartals gemäß der abgebildeten Graphik.

Zur Zeit zahlen ¼ aller Haushalte mit Telefonanschluss pünktlich ihre Telefongebühren, 1/5 aller Haushalte mit Telefonanschluss gehören zu den Kunden mit wenig Zahlungsrückstand.

a) Bestimmen Sie für eine Stadt mit 40.000 Haushalten mit Telefonanschluss und 1.000 Haushalten ohne Telefonanschluss eine langfristige Prognose für die Entwicklung der Zahlungsprobleme.

b) Welche Modellannahmen, die Sie unter a) gemacht haben, erscheinen Ihnen unrealistisch? (Nennen Sie max. 2)

c) Der neu eingestellte Manager schlägt vor, den Kunden ihre momentanen Schulden zu erlassen und erhofft sich dadurch langfristig weniger Kunden mit Zahlungsrückständen zu haben. Wird seine Strategie erfolgreich sein?

d) Eine zweite Überlegung sieht vor, die Anschlüsse von Haushalten mit wenig Zahlungsrückstand schneller zu sperren (die Gruppen KR, GR und OA bleiben unverändert). Diese Politik führt dazu, dass nur noch 5% der WR-Kunden in dieser Kategorie bleiben, allerdings 25% in die Gruppe GR-Kunden rutschen. Wie erfolgreich wird diese neue Geschäftspolitik sein?

E-Mail: info@School-Scout.de ♦ Internet: http://www.School-Scout.de ♦ Fax: 02501/26048
Linckensstr. 187 ♦ 48165 Münster

Thema:	**Mathe-LK-Klausur Stufe 13**
TMD: 27194	
Kurzvorstellung des Materials:	• Matrizenrechnung, Mengenflussmatrizen anhand von Volkswirtschaftsmodellen
Übersicht über die Teile	• 3 umfangreiche Aufgaben zu den Themen • Lösungen zu den Aufgaben
Information zum Dokument	Ca. 11 Seiten, Größe ca. 128 KByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ⬧ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

AUFGABE 1: Volkswirtschaft

Eine Volkswirtschaft wird in die drei Sektoren Landwirtschaft (Mengen in Pfund), Industrie (Menge in Ellen) und Konsum/Arbeitssektor (Arbeitszeit in Stunden) unterteilt. Unten finden Sie die Mengenflussmatrix, die die Inputs und Outputs pro Zeitperiode angibt.

$$U1 = \begin{pmatrix} 40 & 70 & 90 \\ 80 & 70 & 60 \\ 100 & 120 & 30 \end{pmatrix}$$

(Erste Zeile und Spalte: Landwirtschaft, zweite Zeile und Spalte: Industrie, dritte Zeile: Arbeitseinsatz, dritte Spalte: Konsum)

a) Erklären Sie, welche Informationen Sie aus den Einträgen $U1_{11}$, $U1_{12}$, $U1_{21}$, $U1_{33}$ gewinnen können.

b) Wie viele Pfund und Ellen werden in der Volkswirtschaft insgesamt produziert?

c) Wie hoch ist der Konsum dieser Volkswirtschaft?

d) Bestimmen Sie die Rezepturen zur Produktion von einem Pfund und einer Elle.

e) Es können maximal 250 Pfund produziert werden. Man strebt einen Konsum von 120 Ellen an. Wie viele Ellen müssen insgesamt produziert werden? Wie viel Pfund stehen dann für den Konsum zur Verfügung?

f) Spione haben von der Volkswirtschaft des Nachbarlandes die interne und externe Bedarfsmatrix A und b^T ermittelt:

$$A2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; b2^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vergleichen Sie den Produktionsbedarf dieser Volkswirtschaft mit der ersten bei einem Konsum von y = $\frac{100}{70}$.

g) Ein drittes Land benötigt zur Produktion eines Pfunds 3/5 Pfund und 2/7 Ellen. Bei der Produktion einer Elle werden 3/8 Ellen benötigt. Wie hoch darf der Bedarf an landwirtschaftlichen Gütern pro Elle maximal sein, damit die Volkswirtschaft überhaupt noch etwas für den Konsum produziert?

h) Das Preismodell soll nun noch vertieft werden:

q1: Kosten für 1 Pfund q2: Kosten für 1 Elle q^T: $q^T=(q1 \quad q2)$

p: Kosten für eine Arbeitsstunde

(1) Begründen Sie: Die Kosten für den Konsum betragen q^T*y.

(2) Begründen Sie für den gegebenen Sachzusammenhang: $q^T = q^T*A + p*b^T$.

(3) Zeigen Sie, dass $p*b^T*x = q^T*y$. Benutzen Sie die Gleichung aus (2).

(4) Interpretieren Sie Gleichung (3); zwischen welchen beiden Größen wird eine Gleichheit festgestellt.

AUFAGBE 2:

Eine Mineralölfirma kann extern täglich Produkte im Wert von 130.000 Geldeinheiten (GE) absetzen, zur Herstellung von Produkten im Wert von einer Geldeinheit benötigt sie jedoch Kohle im Wert von 0,1 GE, Elektrizität im Wert von 0,3 GE und Dieselöl (aus eigener Produktion) im Wert von 0,2 GE.

Ein Elektrizitätswerk verzeichnet einen externen Bedarf von 120.000 GE täglich, benötigt zur Erbringung von Leistungen im Wert einer Geldeinheit jedoch Dieselöl im Wert von 0,3 GE, Kohle im Wert von 0,5 GE und Strom (aus eigener Produktion) im Wert von 0,1 GE.

Die Kohlemine schließlich benötigt zur Förderung von Kohle im Wert von einer GE Dieselöl im Wert von 0,1 GE und Strom im Wert von 0,3 GE. Der tägliche externe Bedarf beträgt 20.000 GE.

a) Stellen Sie die Rezepturmatrix R auf, in der die Rezepturen für Mineralöl, Elektrizität und Kohle im Wert von einer Geldeinheit stehen? Was steht in welcher Spalte?

b) Berechnen Sie die täglichen Produktionsmengen, mit denen der interne und der externe Bedarf dieser drei Unternehmen gedeckt werden kann.

c) Stellen Sie eine vollständige Mengenflussmatrix auf.

AUFGABE 3:

a) Zeigen Sie: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $M_i = \frac{1}{a*d - b*c}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ sind invers zueinander.

b) Für welche k ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ nicht invertierbar?