SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Lineare Algebra: Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

Thema:	**Lineare Algebra: Lineare Gleichungssysteme und Matrizen**
TMD:	
Kurzvorstellung des Materials:	Im Unterricht der Oberstufe führen Fragestellungen in der Analytischen Geometrie häufig auf das Lösen von linearen Gleichungssystemen. Dieses Material bietet Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe eine breite Einführung in das Lösen von linearen Gleichungssystemen anhand des Gauß-Algorithmus sowie über inverse Matrizen. Zahlreiche Übungsaufgaben bieten die Möglichkeit, das Gelernte zu festigen und zu vertiefen.
Übersicht über die Teile	Exemplarische Einführung in das Thema und 6 mehrteilige Aufgaben mit ausführlichen Musterlösungen zur Anwendung des Gauß-Algorithmus, unterbestimmten Gleichungssystemen, Gleichungssysteme mit Formvariablen, Inverse Matrizen.
Information zum Dokument	• Ca. 19 Seiten, Größe ca. 5,4 MByte
SCHOOL-SCOUT – schnelle Hilfe per E-Mail	SCHOOL-SCOUT ♦ Der persönliche Schulservice Internet: http://www.School-Scout.de E-Mail: info@School-Scout.de

Lösen linearer Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen

Der Gauß-Algorithmus

Betrachten wir folgendes Gleichungssystem mit drei Unbekannten:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ & & & & 4x_3 & = & 12 \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem (kurz: LGS) wäre sehr leicht lösbar, da in der dritten Zeile nur eine Unbekannte vorkommt, die wir leicht berechnen können: $4x_3 = 12 \Leftrightarrow x_3 = 3$. Diese Lösung können wir in die zweite Gleichung einsetzen und so x_2 berechnen:

$$x_2 - x_3 = -1 \quad \overset{x_3=3}{\Longrightarrow} \quad x_2 - 3 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2.$$

Die beiden Ergebnisse wiederum können wir in die erste Zeile einsetzen, in der alle drei Variablen auftauchen und so die verbleibende Unbekannte berechnen:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \quad \underset{x_3=3, x_2=2}{\Longrightarrow} \quad 2x_1 + 3 + 2 = 7 \quad \leftrightarrow \quad 2x_1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1.$$

Das Gleichungssystem hat somit die Lösung $\mathbb{L} = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$.

Die Form, in der das obige lineare Gleichungssystem vorliegt, nennen wir „untere Dreiecksgestalt“. Hiermit ist gemeint, dass man eine Gleichung besitzt, in der alle Unbekannten auftauchen (hier: 3) und danach nur noch Gleichungen, in denen jeweils eine Unbekannte weniger steht, das bedeutet im obigen Fall, dass die zweite Gleichung nur noch 2 Unbekannte enthält und die dritte Gleichung nur noch eine. Liegt diese Dreiecksgestalt vor, so können wir sukzessiv das System von unten nach oben durch Einsetzen lösen, wie im Beispiel beschrieben.

In der Regel liegen lineare Gleichungssysteme allerdings nicht in dieser speziellen Form vor. Betrachten wir als Beispiel das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2. \end{array}$$

Hier sind in allen drei Gleichungen alle drei Unbekannten enthalten. Mit Hilfe des sogenannten Gauß-Algorithmus können wir durch ein einfaches Verfahren jedes Gleichungssystem, wenn es denn lösbar ist, in die untere Dreiecksgestalt überführen.

Der Gauß-Algorithmus ist nichts Anderes als das systematische Anwenden des Ihnen bekannten Additionsverfahrens zum Lösen linearer Gleichungssysteme aus der Mittelstufe, das heißt, Sie können auch hier

- Zeilen beliebig vertauschen

- Zeilen mit festen reellen Zahlen multiplizieren
- Beliebige Vielfache zweier Zeilen miteinander addieren oder subtrahieren.

Zur Vereinfachung und zum Sparen von Schreibarbeit schreiben wir das Gleichungssystem in der sogenannten „erweiterten Koeffizientenmatrix“, das bedeutet, wir schreiben das System als Matrix und lassen hierbei einfach die Unbekannten weg. Das obige System wird damit zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Das Verfahren des Gauß-Algorithmus sieht im Einzelnen wie folgt aus:

1. Die erste Zeile belassen wir so, wie sie angegeben ist. Sie sollte alle drei Unbekannten enthalten (wie im zuvor durchgerechneten Beispiel). Sollte das nicht der Fall sein, so können Sie die Zeilen tauschen.

2. Im ersten Schritt addieren wir zu den Zeilen 2 und 3 geeignete Vielfache von Zeile 1, sodass die Unbekannte x_1 herausfällt, das bedeutet, dass die erste Spalte von Zeile 2 und 3 jeweils 0 wird.

3. Im zweiten Schritt wiederholen wir das Verfahren so, dass in der 3. Zeile die Unbekannte x_2 herausfällt. Hierzu addieren wir geeignete Vielfache von Zeile 2 zu Zeile 3. Würden Sie hierzu die 1. Zeile nutzen, so würde unser vorheriger Schritt sinnlos sein, denn dann hätten Sie wieder die Unbekannte x_1 im Spiel.

4. Nun liegt das LGS in unterer Dreiecksgestalt vor. Sie können ausgehend von Variable x_3 das System durch Einsetzen in Zeile 2 und 1 auflösen.

Wir werden die 4 Schritte nun an dem angegebenen Beispiel durchführen:

1. Dies ist erfüllt, die 1. Zeile enthält alle drei Unbekannten.

2. Um in der zweiten Zeile den Eintrag „2“ zu beseitigen, subtrahieren wir Zeile 1 und 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{I-II}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

   Wir eliminieren in der dritten Zeile den ersten Eintrag, indem wir von Zeile 1 das Zweifache von Zeile 3 subtrahieren:

$$\overset{I-2\cdot III}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & -1 & 6 \end{array}\right).$$

   Nun ist der erste Eintrag in den beiden unteren Zeilen jeweils 0, wie gewünscht.

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Lineare Algebra: Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de