Mathe-Leistungskurs-Klausur Stufe 13, Nr. 2

LÖSUNGEN

AUFGABE 1:

2.1

a) Es handelt sich um Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen, also Anzahl der Möglichkeiten bei k Zügen und n Kugeln: $\binom{n}{k}$. Hier 38 Kugeln und 7 Züge, also $\binom{38}{7} = 12.620.256$ Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1/ $\binom{38}{7}$ = 0,000000079.

b) Bei 4 Richtige „zieht“ man 4 getippte aus 7 gezogenen, die 3 falschen Kreuze können auf die 31 nicht gezogenen Zahlen verteilt werden. Also P(4 Richtige) = $\frac{\binom{7}{4}\binom{31}{3}}{\binom{38}{7}} = 1,25\%$

c) Es werden 31 Zahlen nicht gezogen. Zwischen jeder dieser 31 Zahlen darf max. eine gezogene liegen (30 Plätze). Außerdem dürfen sie vor bzw. hinter der größten bzw. kleinsten nicht gezogenen Zahl liegen. Also gibt es 32 mögliche Plätze auf die die 7 Kugeln verteilt werden können. P(kein Pärchen) = $\frac{\binom{32}{7}}{\binom{38}{7}} = 26,7\%$

2.2

a) Erwarteter Gewinn: E=0,35*1€+0,1*2€+0,05*5€+0,015*10€+0,005*100€=1,45€

b) Bei einer sehr großen Anzahl von Losen bleibt die Gewinnwahrscheinlichkeit auf allen Stufen erhalten, dann kann man die Lotterie als Bernoulli-Experiment bezeichnen.

c) Der Anteil der Gewinnlose beträgt 52%. Geht man von einem Bernoulli-Experiment aus, so beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit beim 5. Los 0,52, da es egal ist, was vorher gezogen wurde.

d) Die Wahrscheinlichkeit für eine Niete beträgt bei jedem Ziehen 0,48. Bei 5 Losen gilt also P(5 Nieten)=$0{,}48^5$=2,5%

e) Formel für Binomialverteilung: $P(X=k)=\binom{n}{k}*p^k*q^{n-k}$, mit k: Anzahl der Gewinne, n: Anzahl der Ziehungen, p: Gewinnwahrscheinlichkeit, q: Nietenwahrscheinlichkeit

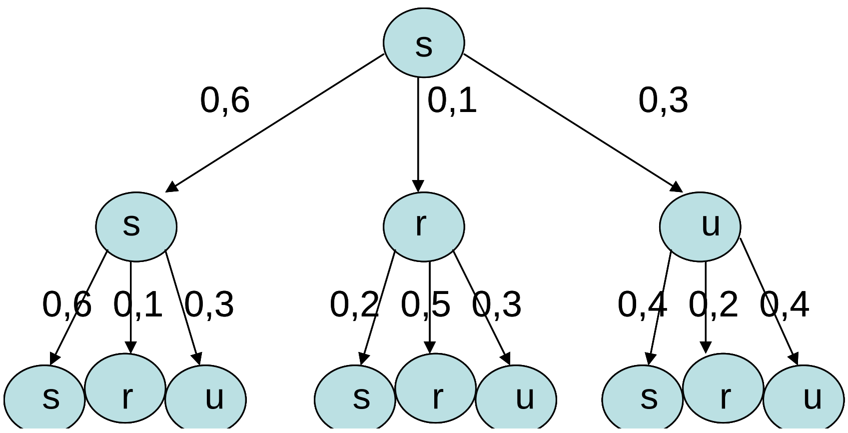
$P(X=2)=\binom{5}{2}*0{,}52^2*0{,}48^3=29{,}9\%$

AUFGABE 2:

2.1

a) Die Werte an den Pfeilen geben die Übergangswahrscheinlichkeiten an. Z.B. gibt der Pfeil ganz oben an, dass die Wahrscheinlichkeit für einen weiteren sonnigen Tag 0,6 beträgt, wenn der Ausgangstag sonnig war. Nach einem sonnigen Tag ist es mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 rechnerisch und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 unbeständig.

b) Baumdiagramm



1. Tag: P(s)=0,6 P(u)=0,3 P(r)=0,1

2. Tag: P(s)=0,5 P(u)=0,33 P(r)=0,17

c) + d) Wettermatrix: sonnig/unbeständig/regnerisch. Von Spalte zur Zeile lesen.

$$W = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}, \qquad \text{beliebiger Startvektor: } S = \begin{pmatrix} P(s) \\ P(u) \\ P(r) \end{pmatrix}$$

$$P = (\lim_{n\to 0}(W^n)) * S = \begin{pmatrix} 0,\overline{4} & *(P(s)+P(u) & +P(r)) \\ 0,\overline{3} & (P(s)+P(u) & +P(r)) \\ 0,\overline{2} & (P(s)+P(u) & +P(r)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,\overline{4} \\ 0,\overline{3} \\ 0,\overline{2} \end{pmatrix}, \text{ da P(s)+P(u)+P(r)=1}$$

Man sieht, dass unabhängig vom Startwert für P(s), P(u) und P(r) der Grenzvektor P entsteht. Also ist die Wahrscheinlichkeit für sonnige Tage langfristig 0,4, für unbeständige Tage 0,3 und für regnerische Tage 0,2.

e) Zur Berechnung der Prognose für den nächsten Tag gilt: W*h=P. Wobei h die Verteilung für den heutigen Tag und P die Prognose für den nächsten Tag angibt. Um die Gleichung nach h aufzulösen muss man von links mit der inversen Matrix von W multiplizieren.

$$h = W^{-1} * P = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Somit war es am Anreisetag halb sonnig, halb unbeständig.

2.2

a) Aus dem Graphen lässt sich folgende Übergangsmatrix entwickeln: (KR/WR/GR/OA, von Spalte zu Zeile lesen)

Übergangsmatrix $T := \begin{bmatrix} .8 & .7 & .6 & .1 \\ .2 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & .1 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & .1 & .9 \end{bmatrix}$