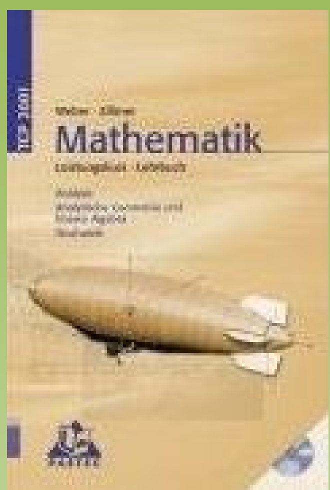
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Lehrbuch Mathematik - Gymnasiale Oberstufe - Leistungskurs

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Inhalt

ANALYSIS

ANALYTISCHE GEOMETRIE

STOCHASTIK

Bedeutung der Randsymbole: Beispiele (Lehr-)Sätze, Regeln, Verfahren Definitionen

Weber · Zillmer

Mathematik

Lehrbuch
Gymnasiale Oberstufe
Leistungskurs

Analysis
Analytische Geometrie und lineare Algebra
Stochastik

PAETEC
Verlag für Bildungsmedien

ANALYSIS

Mit *Analysis* bezeichnet man heute ein außerordentlich großes Teilgebiet der Mathematik, das zahlreiche Disziplinen mit umfangreichen Anwendungen in anderen Gebieten der Mathematik sowie in den Naturwissenschaften und der Technik umfasst. Viele Vorgänge in Natur und Technik kann man nur mithilfe der Analysis adäquat beschreiben – sei es z. B., um die Gesetze der Planetenbewegung abzuleiten, die Schwingungen einer Saite bzw. eines Pendels zu erfassen oder auch die Temperaturverteilung in einem Körper zu kennzeichnen.

Diese Sachverhalte lassen sich jedoch nicht mit diskreten Größen beschreiben, denn die Bewegungsgrößen, die Temperatur usw. ändern sich kontinuierlich. Historisch gesehen bildete die Lösung dieses Problems einen der Ausgangspunkte für die Entstehung der Analysis im 17. Jahrhundert. Die Mittel der Arithmetik und Algebra reichten dazu nicht aus, denn sie konnten den Zustand nur für einzelne konkrete Situationen, etwa für einen festen Zeitpunkt oder die durchschnittliche Entwicklung über einen gewissen Zeitraum wiedergeben, nicht aber den eigentlichen Verlauf des Prozesses. Nur in wenigen Fällen war eine adäquate Beschreibung des jeweiligen Sachverhalts mit geometrischen Mitteln möglich. Die Lösung dieses Problems markierte einen entscheidenden Wendepunkt in der Mathematik, die ihren Charakter grundlegend veränderte: Man ging von der Betrachtung diskreter Größen über zur Untersuchung variabler Größen, die ihren Wert kontinuierlich verändern. Für derartige Untersuchungen bedurfte es zugleich eines neuen Mittels, um die Abhängigkeit zwischen variablen Größen zu erfassen, um die den jeweiligen Vorgang beschreibende Gesetzmäßigkeit formulieren zu können. Dies führte zur Herausbildung des Funktionsbegriffs, der zu einem zentralen Begriff der Analysis wurde. Mit dem Studium der Eigenschaften von Funktionen erwuchs den Mathematikern ein riesiges Aufgabenfeld. Diese Forschungen bildeten dann den Gegenstand der Analysis bzw. ihrer Teilgebiete.

Es würde jedoch den historischen Werdegang unzulässig vereinfachen, wenn man die Entstehung der Analysis auf die Beschäftigung mit den wenigen genannten Problemen reduzierte. Erwähnt werden muss zunächst auch die Fülle von Mechanismen, die in jenen Jahren erfunden und durch deren Konstruktion die „Mechanici“, die Ingenieure jener Zeit, vor die Aufgabe der Beherrschung von Bewegungsabläufen gestellt wurden. Zu diesen Geräten gehörten Windmühlen, Pumpwerke, Kräne, Schleifmaschinen, Schiffshebewerke, Papiermühlen, Maschinen zur Wasserhaltung in Bergwerken, Pochwerke usw. Es gab aber noch zwei weitere Problemkreise, die die Mathematiker im 17. Jahrhundert nicht minder bewegten und auf den Weg zur Analysis führten: Zum einen mechanisch-geometrische Probleme, wie sie mit der Bestimmung des Flächen- oder Volumeninhalts bzw. des Schwerpunkts eines unregelmäßig begrenzten Körpers beschrieben werden, und zum anderen geometrische Probleme im engeren Sinne, die die Untersuchung der Eigenschaften von Kurven, Flächen und Körpern zum Gegenstand hatten und die mit der Ermittlung der Tangente an eine beliebige Kurve in einem einfachen Fall umschrieben sind. Diese stärker geometrisch orientierten Fragestellungen lassen auch erahnen, wie wichtig die von R. DESCARTES (1596–1650) und P. DE FERMAT (1601–1665) entwickelten Anfänge der analytischen Geometrie für die Entstehung der Analysis waren. Durch die analytische Geometrie erhielten die Mathematiker ein Mittel, um den verschiedenen geometrischen Objekten, den grafischen Veranschaulichungen von einzelnen Vorgängen eine Formel zuzuordnen, die das geometrische Objekt völlig beschrieb.

Charakteristisch für die Lösung der genannten Probleme war das Auftreten von Grenzwertprozessen. Um beispielsweise den Anstieg der Tangente an eine beliebige Kurve im Punkt $(x_0; y_0)$ zu ermitteln, führt man folgende Überlegung durch: Man wählt in der Umgebung des Punktes $(x_0; y_0)$ einen zweiten Punkt $(x_1; y_1)$ und bestimmt die Sekante durch die Punkte $(x_0; y_0)$ und $(x_1; y_1)$. Der Anstieg dieser Sekante wird den gesuchten Tangentenanstieg umso besser approximieren, je näher der Punkt $(x_1; y_1)$ am Berührungspunkt $(x_0; y_0)$ liegt. Man erhält also den Tangentenanstieg aus dem Anstieg der Sekante, wenn man anschaulich den Punkt $(x_1; y_1)$ längs der Kurve zum Punkt $(x_0; y_0)$ bewegt. Eine ähnliche Argumentation lässt sich für die Ermittlung der Momentangeschwindigkeit formulieren. Bei der Bestimmung des Inhalts einer krummlinig begrenzten Fläche F wird man in die Fläche einfach berechenbare, geradlinig begrenzte Flächen F_n, z.B. Rechtecke, einbeschreiben bzw. F in solche Flächen einschließen und dann die Summe dieser Teilflächen F_n bilden. Je kleiner man diese Rechtecke wählt, umso besser werden sie die Fläche F ausschöpfen bzw. einschließen. In beiden Fällen müssen also Grenzprozesse durchgeführt werden und die beiden Beispiele markieren auch die typischen Fälle: Im ersten Fall muss der Grenzwert eines Bruches bestimmt werden, wobei Zähler und Nenner immer kleiner (man sagt auch *infinitesimal* oder *unendlich klein*) werden. Bei naiver Betrachtungsweise ergäbe sich also am Ende ein Bruch $\frac{0}{0}$. Im zweiten Fall müssen, vereinfacht formuliert, unendlich viele Objekte summiert werden, die alle unendlich klein sind; man müsste also, wieder naiv betrachtet, „$\infty \cdot 0$“ bestimmen. Für diese Fragen wird die Analysis eine überraschende Antwort präsentieren. Das erste Beispiel wird zu den Begriffen des Differentialquotienten und der Ableitung führen, das zweite zu den Begriffen der unendlichen Reihe und des Integrals.

Die Lösung der oben skizzierten umfangreichen Aufgabe war das Werk mehrerer Mathematikergenerationen. Bereits in der Antike lassen sich erste Überlegungen dazu finden, doch begann die intensive Beschäftigung mit diesen Fragen erst im 17. Jahrhundert. Der Physiker G. GALILEI (1564–1642), der Astronom J. KEPLER (1571–1630), der Philosoph R. DESCARTES sowie der Jurist und Mathematiker P. DE FERMAT waren einige der Wegbereiter bei der Herausbildung der Analysis. Die Grundlagen der Theorie wurden dann von I. NEWTON (1643–1727) und G. W. LEIBNIZ (1646–1716) gelegt. Newton fand die Grundgedanken zur Infinitesimalmathematik Mitte der 60er Jahre des 17. Jahrhunderts, eine Ausarbeitung der Theorie publizierte er aber erst viel später. LEIBNIZ entwickelte im Oktober 1675 die Grundideen seines Infinitesimalkalküls und begann 1682 mit der Publikation wichtiger Teilergebnisse. Beide Gelehrten waren sich der Bedeutung ihrer Ideen bewusst und hatten keinen Zweifel, dass sie eine neue mächtige Methode zur Behandlung zahlreicher Probleme gefunden hatten, aber sie ahnten wohl kaum, welch gewaltiges mathematisches Gebäude sie begründet hatten. Kühn schritten sie und ihre Zeitgenossen vorwärts und eröffneten mit der Differential- und Integralrechnung, der Reihenlehre, der Lösung von Differentialgleichungen und der Variationsrechnung wichtige Teilgebiete der Analysis, doch die Fundamente des Gebäudes blieben trotz großer Bemühungen vieler Mathematiker noch sehr schwach. Nachdem L. EULER (1707–1781) dem Kalkül in meisterhaften Lehrbüchern eine erste systematische Darstellung gegeben hatte, sollte diese logisch einwandfreie Begründung den Mathematikern des 19. Jahrhunderts um A. L. CAUCHY (1789–1857), P. G. L. DIRICHLET (1805–1859), B. RIEMANN (1826–1866) und K. WEIERSTRASS (1815–1897) vorbehalten bleiben, die zugleich noch mehrere grundlegende Erweiterungen vornahmen. Beispielsweise erfuhr die Analysis dadurch eine immense Bereicherung, dass man bei den variablen Größen statt der reellen Zahlen komplexe Zahlen betrachtete.

Mit dem Ausbau der Analysis, der sich auch im 20. Jahrhundert fortsetzte, waren immer wieder neue Anwendungsmöglichkeiten und die Lösung von Fragen verbunden, die sich aus der Entwicklung der Naturwissenschaften und Technik herauskristallisiert hatten. Entscheidend war die durch die exakte Definition der Grundbegriffe, wie Funktion, Grenzwert, Stetigkeit usw., geschaffene sichere Basis der Theorie, von der in den folgenden Kapiteln wichtige Elemente näher erläutert werden sollen.

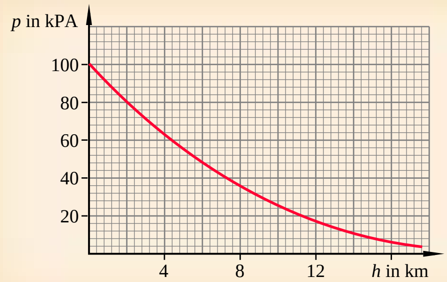
A Funktionen

Bereits in dem einleitenden Abschnitt wurde der Funktionsbegriff als ein zentraler Begriff der Analysis gekennzeichnet und seine Bedeutung für die gesamte Mathematik hervorgehoben. Auch bei der Anwendung der Mathematik in den Naturwissenschaften, in der Technik, Wirtschaft und Gesellschaft spielt der Funktionsbegriff eine wichtige Rolle. Am Anfang steht dabei meist die übersichtliche, komprimierte und auf Wesentliches konzentrierte Beschreibung bestimmter funktionaler Zusammenhänge und Abhängigkeiten, wobei hierfür vor allem Gleichungen, Tabellen, grafische Darstellungen oder auch umgangssprachliche Darstellungen genutzt werden. Einige Beispiele bzw. Aufgaben sollen dies illustrieren.

(1) Wasser besitzt die Fähigkeit, auch gasförmige Stoffe, z. B. Sauerstoff, Kohlenstoffdioxid, Schwefeldioxid oder Chlor, lösen zu können. Praktisch bedeutsam ist diese Lösefähigkeit u. a. für die Atmung der Fische: Reicht in einem Gewässer der von Fischen benötigte Sauerstoff nicht aus, so kann es auch ohne Verschmutzung zum Fischsterben kommen. Die Löslichkeit von Sauerstoff im Wasser ist temperaturabhängig, wie die nebenstehende Tabelle zeigt.

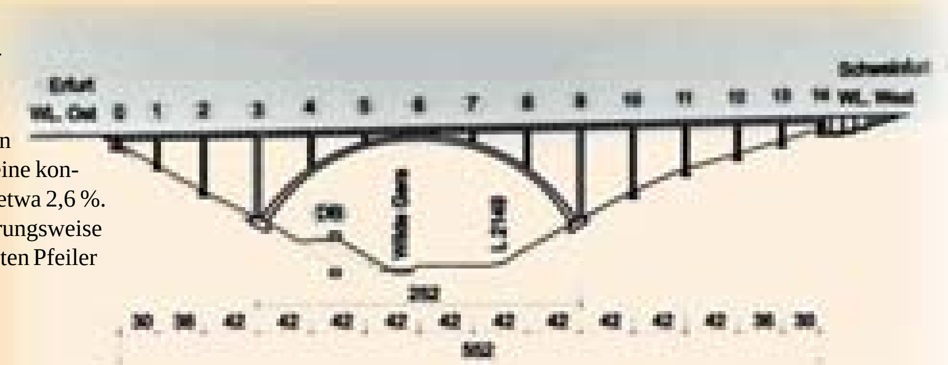
Temperatur in °C	**Sauerstoff in $\frac{mg}{l}$**
0	14,16
4	12,70
8	11,47
12	10,43
16	9,56
20	8,84
24	8,25
28	7,75

(2) Die Siedetemperatur von Wasser hängt vom Luftdruck ab. Ist der Druck höher oder geringer als der normale Luftdruck, so ist auch die Siedetemperatur höher bzw. geringer als 100 °C. Ersteres macht man sich bei Schnellkochtöpfen zu Nutze. Beispielsweise beträgt bei einem Druck von 130 kPa die Siedetemperatur des Wassers 108 °C, bei 180 kPa schon 117 °C. Der zweite Sachverhalt ist die Ursache dafür, dass Wasser auf dem Montblanc (4807 m), auf dem der Luftdruck nur noch 55 % des normalen Werts beträgt, bereits bei 85 °C siedet.



(3) Ein Kondensator möge in 3 s eine Ladung von 2 C aufnehmen und sich durch eine geeignete Schaltung dann (praktisch „schlagartig") entladen, wonach der gleiche Prozess wieder beginnt. Man stelle diesen Sachverhalt grafisch dar und beschreibe ihn durch eine geeignete Gleichung (s. Beispiel A 18).

(4) Das Verkehrsprojekt *Deutsche Einheit* sieht den Bau einer Autobahn durch den Thüringer Wald vor, die dessen Kamm von Ilmenau nach Zella-Mehlis quert. Unmittelbar vor dem Rennsteigtunnel als der Hauptkammdurchquerung wird die Autobahn durch die größte Bogenbrücke Deutschlands über das Tal der Wilden Gera geführt. Die Bogenspannweite beträgt 252 m (Bauwerksgesamtlänge 552 m), wobei im Bogenbereich 6 Pfeiler im Abstand von jeweils 42 m die Fahrbahn tragen (s. Fig.). Die Brücke erhebt sich etwa 110 m über dem Talgrund, der Beginn des Bogens und der Fußpunkt der äußersten Pfeiler liege rd. 38,5 m über dem Talgrund. Die Stärke des Bogens verringert sich von 5,5 m an den Widerlagern auf 3,3 m im höchsten Punkt. Die Autobahn besitzt von Osten nach Westen eine konstante Steigung von etwa 2,6 %. Man berechne näherungsweise die Länge der äußersten Pfeiler im Bogenbereich (s. Beispiel D 13).



A 1 Der Begriff *Funktion*

In der Kinematik, einem Teilgebiet der Physik, werden Bewegungsvorgänge untersucht und beschrieben. Für den freien Fall, einem Sonderfall der geradlinigen, gleichmäßig beschleunigten Bewegung, entdeckte bereits GALILEI im Jahre 1604 das so genannte *Fallgesetz* $s = \frac{g}{2}t^2$.
Dieses Fallgesetz bringt einen Zusammenhang zwischen dem Fallweg s und der Fallzeit *t* zum Ausdruck, gilt allerdings streng genommen in dieser Form nur für das Vakuum.

Nimmt man vereinfachend an, dass ein Bungee-Jumping-Springer in der ersten Phase nach seinem Absprung „frei fällt“, so würde er nach diesem Gesetz (bei Berechnung mit $g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$) in 1 s rd. 5 m, in 2 s rd. 20 m, in 3 s etwa 45 m fallen. Allgemein gilt: Hat das Gummiseil eine Länge s, so wäre der freie Fall allerdings bereits nach $t_f = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ beendet und die bremsende Wirkung des Seils käme zu Geltung. Der Springer hätte zum Zeitpunkt t_f eine Geschwindigkeit $v_f = g \cdot t_f$. Nehmen wir an, das Gummiseil würde eine Verzögerung b bewirken, so erreichte der Springer nach $t_t = \frac{v_f}{|b|}$, also

nach $s_t = \left|\frac{b}{2}\right| t_t^2 = \left|\frac{b}{2}\right| \left(\frac{v_f}{|b|}\right)^2 = \left|\frac{b}{2}\right| \left(g \cdot \frac{t_f}{|b|}\right)^2 = \left|\frac{b}{2}\right| \cdot g^2 \cdot \frac{\frac{2s}{g}}{b^2} = \frac{g \cdot s}{|b|}$ weiterem „Sturz“ den tiefsten Punkt. Für die Gesamthöhe H würde demzufolge gelten: $H = s + s_t = s + \frac{g}{|b|} \cdot s$. Daraus folgt für die erforderliche Seillänge $s(H) = \frac{|b|}{|b| + g} \cdot H$. Jedem Wert der Höhe H wird auf diese Weise (bei gegebenem Materialparameter b) eine Höchstseillänge s zugeordnet.

Wenn zwischen den Elementen zweier Mengen (in unserem Beispiel also die Menge der Höhen-Maßzahlen und die Menge der Seillängen-Maßzahlen) eine *eindeutige Zuordnung* besteht, dann spricht man in der Mathematik von einer Funktion.

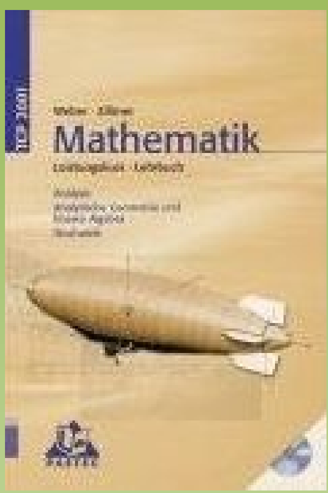
A 1

Definition A 1:
Unter einer **Funktion** f versteht man eine eindeutige Zuordnung. Dabei wird jedem $x \in D_f$ genau ein $y \in W_f$ zugeordnet.

Man nennt
D_f den *Definitionsbereich* oder die *Definitionsmenge* der Funktion f,
W_f den *Wertebereich* oder die *Wertemenge* der Funktion f.

In Kurzform: $f: x \mapsto y$ oder $f: x \mapsto f(x)$.

Durch die Angabe der *Zuordnungsvorschrift* und des *Definitionsbereichs* wird eine Funktion vollständig und korrekt gekennzeichnet. Hat die Zuordnungsvorschrift die Form einer Gleichung $y = f(x)$, so nennt man $y = f(x)$ die *Funktionsgleichung* und $f(x)$ den *Funktionsterm*.


Mathematik