Auszug aus:

Mathe-Leistungskurs-Klausur Stufe 12

$$E3 = \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Höhe der Pyramide

Die Höhe der Pyramide ist die Länge des Vektors ST. Bedingungen: T liegt in E2, ST ist orthogonal zu den Richtungsvektoren 1 und 2 der Ebene 2.

$$ST = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt von Richtungsvektor 1 und ST: $-44 + 90\mu + 35\lambda$

Skalarprodukt von Richtungsvektor 2 und ST: $-93 + 234\mu + 90\lambda$

Lösen des Gleichungssystems: $\mu = -\frac{47}{6}$ $\lambda = \frac{107}{5}$

In ST einsetzen: ST=(0| $\frac{7}{10}$ |$-\frac{21}{10}$)

Länge des Vektors ST: 2,21359

Die Höhe der Pyramide ist 2,21.

e) Richtung der Sonnenstrahlen und die Schattenspitze K

Die Richtung der Sonnenstrahlen ist der Vektor SK. SK=(K-S)=(0|-8|-5)

Gesucht ist der Abstand von der Schattenspitze zu der Kante AB. Dazu konstruiert man eine Gerade g durch A und B. Der kürzeste Abstand von K zu g ist der gesuchte Abstand.

$$g = \psi \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um den kleinsten Abstand von g und K zu erhalten, suchen wir den Punkt M. Bedingungen an M: M liegt auf g und KM ist orthogonal zum Richtungsvektor von g.

$$KM=(M-K)=\psi\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\6\\2\end{pmatrix}$$

Skalarprodukt von KM und dem Richtungsvektor von g: - 3 + 9 ψ

Nach ψ auflösen: ψ= 1/3

In KM einsetzen: KM=(0|6|2)

Länge des Vektors KM: 6,32456

Der Abstand der Schattenspitze von der Kante AB beträgt ca. 6,32.

f) Pyramide mit Spitze T

Damit alle Winkel an der Spitze T 90° haben, rechnet man das Skalarprodukt von immer 2 Seiten der Pyramide aus und löst dann das entstandene Gleichungssystem.

T=(t1|t2|t3)

Skalar (B-T),(C-T): (4-t1)(2-t1)+(1-t2)(4-t2)-t3(1-t3)

Skalar (C-T),(A-T): (2-t1)(1-t1)+(1-t2)(4-t2)-t3(1-t3)

Skalar (A-T),(B-T): (1-t1)(4-t1)+(1-t2)(1-t2)+(t3)(t3)

Die Gleichung hat zwei Lösungen, somit gibt es einmal den Punkt T1=(2|2|-1) und den Punkt T2=(2| $\frac{6}{5}$ | $\frac{7}{5}$), die die vorgegeben Bedingungen erfüllen. Beide sind sinnvoll, da es Punkte ober- und unterhalb der Pyramide sind.