SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Kompakte Vorbereitung zu den zentralen Prüfungen Klasse 10

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

Musterlösung

a) Erinnern Sie sich: Kennt man von einer quadratischen Funktion die Lage der Nullstellen, so ist der Funktionsterm bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Sind die Nullstellen einer Parabel x_1 und x_2, so lautet die allgemeine Funktionsgleichung:

$$f(x) = k \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

In unserem Fall sind die Nullstellen mit $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ vorgegeben – daher erhalten wir zunächst:

$$f(x) = k \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$$

mit unbekanntem Streckungsfaktor k. Dieser wird eindeutig bestimmt, wenn wir unsere Kenntnis ausnutzen, dass wir wissen, dass der Punkt $P = (1; 8)$ auf dem Graphen der Funktion liegen soll. In dem Fall muss der Punkt nämlich die Funktionsgleichung erfüllen, das heißt, wir können fordern, dass

$$f(1) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 8 = k \cdot (1 + 1) \cdot (1 - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 8 = -4k \quad \Leftrightarrow \quad k = -2$$

gilt. Damit lautet die Funktionsgleichung der Parabel

$$f(x) = -2 \cdot (x + 1)(x - 3)$$

oder ausmultipliziert

$$f(x) = -2(x^2 - 3x + x - 3) = -2(x^2 - 2x - 3)$$

Wenn Sie sich an den vorgeführten Lösungsweg, der die Linearfaktorzerlegung ausnutzt, nicht erinnern, so können Sie selbstverständlich auch die Funktionsgleichung über ein lineares Gleichungssystem lösen.

Eine Parabel hat die allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wenn Sie fordern, dass der Punkt $P = (1; 8)$ auf dem Graphen liegt, so muss gelten, dass

$$f(1) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = 8.$$

Die vorgegebenen Nullstellen können Sie als die Punkte $N_1 = (-1; 0)$ und $N_2 = (3; 0)$ identifizieren und damit erhalten Sie zwei weitere Gleichungen:

$$f(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - b + c = 0$$

sowie

$$f(3) = 0 \quad \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 0$$

Wenn Sie dieses Gleichungssystem lösen, erhalten Sie als Lösung $a = -2, b = 4, c = 6$, sodass Sie auch hier die obige Funktionsgleichung erhalten.

b) Eine Parabel besitzt einen Scheitel, der symmetrisch zu den Nullstellen liegt. Auf Grund der Tatsache, dass wir die Nullstellen kennen, können wir uns das Leben einfach machen. Wenn die Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ liegen und der Scheitel genau in der Mitte der beiden Werte liegt, so muss der x-Wert des Scheitels

$$x = \frac{-1+3}{2} = 1$$

betragen.

Der zugehörige Funktionswert ist $f(1) = 8$ - dies ist nämlich unser Punkt P.

Somit lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes $S = P = (1; 8)$.

Sie können natürlich auch den „üblichen“ Weg zur Bestimmung eines Scheitelpunktes über die quadratische Ergänzung wählen. In diesem Fall ergänzen Sie

$$f(x) = -2 \cdot (x^2 - 2x - 3)$$

zu einem Binom:

$$f(x) = -2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1 - 3) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -2 \cdot [(x-1)^2 - 4],$$

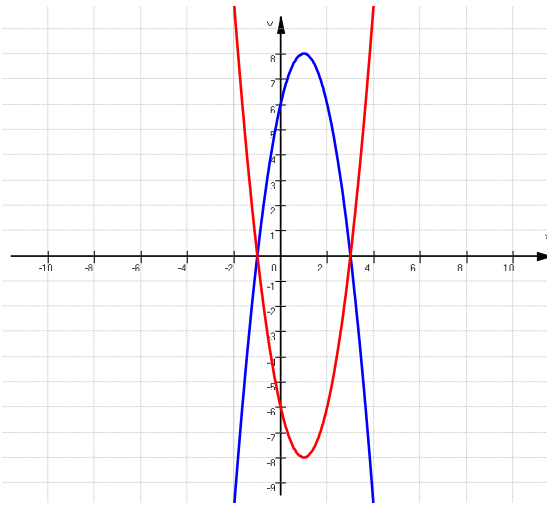
sodass Sie hier die Scheitelpunktsform mit

$$f(x) = -2 \cdot (x-1)^2 + 8$$

erhalten, der Sie sofort ablesen können, dass die Koordinaten des Scheitels $S = (1; 8)$ lauten, da eine Parabel in der allgemeinen Scheitelpunktsform

$$f(x) = k \cdot (x-d)^2 + e$$

den Scheitel $S = (d; e)$ besitzt.



c) In der nebenstehenden Graphik sehen Sie die Funktion f (in blau) sowie die an der x-Achse gespiegelte Funktion f^* (in rot). Spiegelt man die Parabel an der x-Achse, so spiegeln Sie einerseits den Scheitel an der x-Achse, das heißt, der Punkt $S = (1; 8)$ geht über in den Bildpunkt $S^* = (1; -8)$. Andererseits ist die Bildparabel eine nach oben geöffnete Parabel. Dies hat zur Folge, dass der Streckungsfaktor $k = -2$ in $k^* = +2$ übergeht. Damit können Sie die Funktionsgleichung der Bildparabel angeben:

$$f^*(x) = +2 \cdot (x-1)^2 - 8$$

d) Wir untersuchen die beiden Funktionen auf gemeinsame Punkte, indem wir sie gleichsetzen:

$$-2x^2 + 4x + 6 = -2x + 6 \quad \Leftrightarrow \; -2x^2 + 6x = 0$$

Diese quadratische Gleichung könnten Sie mit der pq-Formel lösen, wir klammern jedoch ein x aus und wenden den Satz vom Nullprodukt an:

$$-2x^2 + 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \cdot (-x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \;\vee\; -x + 3 = 0$$

Sie erhalten somit die beiden möglichen Lösungen $x_1 = 0$ oder $x_2 = 3$. Die Koordinaten der y-Werte bekommen Sie durch Einsetzen in eine der beiden Funktionen. Wir wählen hierzu die Gerade g mit $g(x) = -2x + 6$:

$$g(0) = 6 \quad \Rightarrow \quad S_1 = (0;6)$$

$$g(3) = -2 \cdot 3 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = (3;0)$$

Die Parabel und die Gerade schneiden sich also in den beiden Punkten $S_1 = (0;6)$ und $S_2 = (3;0)$.

Zur allgemeinen Lagebeziehung von Gerade und Parabel: Sie müssen zur Untersuchung, ob die beiden Funktionen gemeinsame Punkte besitzen, eine quadratische Gleichung lösen.

Eine quadratische Gleichung kann genau eine, keine oder genau zwei Lösungen besitzen (eine Gleichung zweiten Grades besitzt höchstens zwei Lösungen).

Wenn Sie keine Lösung der quadratischen Gleichung erhalten, dann schneiden sich die Gerade und die Parabel nicht (man sagt, die Gerade ist eine Passante). Erhalten Sie genau eine Lösung, so berührt die Gerade die Parabel nur (in diesem Fall sprechen wir von einer Tangente) und im Fall zweier Lösungen schneiden sich die beiden Graphen in genau zwei Punkten und wir nennen die Gerade eine Sekante.

e) Gefragt ist nach der Steigung der Geraden, sodass die vorgegebene Geradenschar $h(x) = mx + 6$ Tangente an den Graphen der Parabel ist. Dies hat nach obigen Gesichtspunkten zur Folge, dass die resultierende quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzen muss.

Setzen wir die beiden Funktionsterme gleich, so erhalten wir:

$$-2x^2 + 4x + 6 = mx + 6 \quad \Leftrightarrow \; -2x^2 + 4x - mx = 0$$

Wir faktorisieren auch diese Gleichung zu:

$$x \cdot (-2x + 4 - m) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt finden wir die Lösungen

$x = 0$ und $-2x + 4 - m = 0$.

Die zweite Lösung wäre dann: $-2x = m - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}m + 2$.

Erinnern wir uns: Wir haben gefordert, dass es nur eine Lösung geben soll. – Offensichtlich tauchen hier allerdings zwei auf, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{1}{2}m + 2$, wobei die zweite Lösung von der Steigung m der Geraden abhängt. Damit nur eine Lösung existent ist, müssen beide Lösungen zusammen fallen, das heißt, die Lösung $x_2 = -\frac{1}{2}m + 2$ muss ebenfalls den Wert 0 annehmen. Diese Bedingung liefert uns eine Bestimmungsgleichung für m:

$$x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2}m + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; m = +4$$

Wir haben somit diejenige Gerade gefunden, die eine Tangente an den Graphen der quadratischen Funktion ist:

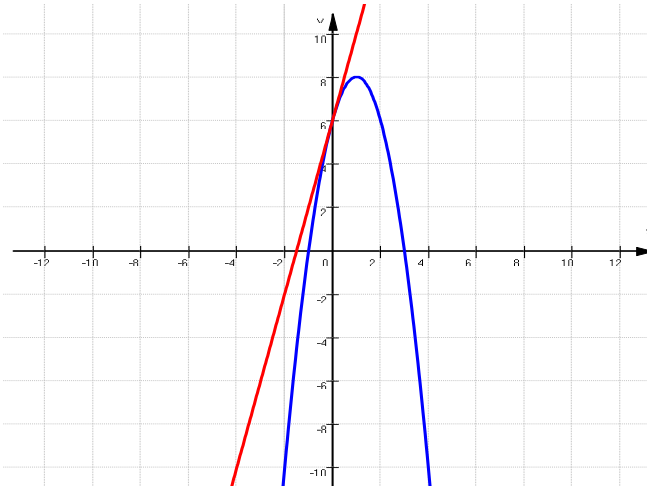
$$h(x) = 4x + 6$$

Wollen wir den Berührpunkt bestimmen, so wissen wir, dass die Lösung für den x-Wert $x = 0$ ist. Damit liegt auch der y-Wert fest: Wir brauchen nur eine der beiden Funktionen an der Stelle $x = 0$ auszuwerten:

$$h(0) = 6 = f(0)$$

Der Berührpunkt ist damit $B = (0; 6)$.

In der unteren Graphik sehen Sie nochmals graphisch veranschaulicht die Parabel mit zugehöriger Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse.



Teil C: Stochastik

Auf dem Eröffnungsfest eines kleinen Versicherungsbüros wird als Attraktion eine Urne angeboten, die 12 rote, 6 blaue und 2 schwarze Kugeln enthält.

a) Geben Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Ziehen einer Kugel mit bestimmter Farbe an!

ω	rot	blau	schwarz
$P(\omega)$			

b) Der Urne werden nacheinander zwei Kugeln entnommen, ihre Farbe notiert und die Kugel anschließend wieder in die Urne zurückgelegt. Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der folgenden Ereignisse und fertigen Sie jeweils ein Baumdiagramm an:

- E1: „Beide Kugeln zeigen die gleiche Farbe“
- E2: „Höchstens eine Kugel ist schwarz“

c) Das Ziehen der Kugeln wird dahingehend abgeändert, dass die Kugel nach dem Ziehen nicht wieder in die Urne zurückgelegt wird. Zeichnen Sie auch hierfür die Baumdiagramme und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse E1 und E2!

Im leicht angeheiterten Zustand wird auf der Eröffnungsfeier ein Spiel vereinbart: Tritt das Ereignis E1 ein, so gewinnt der Spieler 2,50 €, anderenfalls verliert er und muss 1,20 € an die Kasse bezahlen. Das Spiel wird fünfmal gespielt (Modell: Ziehen mit Zurücklegen)

d) Berechnen Sie den zu erwarteten Betrag, den der Spieler im Laufe der 5 Spiele erzielt.

e) Berechnen Sie, bei welchem Gewinn das Spiel fair wäre (d.h. der Erwartungswert 0 ist).

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler genau ein Spiel der fünf gewinnt.

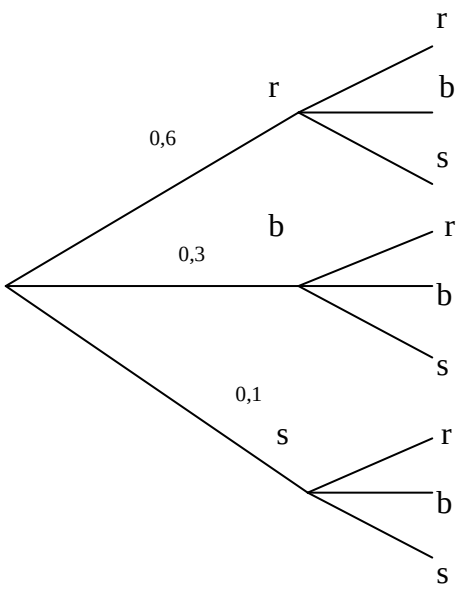
g) Wie häufig muss das Spiel gespielt werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % wenigstens einmal gewinnt? (Aufgabe mit erhöhter Anforderung)

Musterlösung

a) Auf Grund der Tatsache, dass in der Urne insgesamt 20 Kugeln enthalten sind, von denen 12 rot, 6 blau und 2 schwarz sind, ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	rot	blau	schwarz
$P(\omega)$	$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$	$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{10}$

b) **1. Ziehen mit Zurücklegen:**



Da die Kugel wieder zurückgelegt wird, ändert sich an den Wahrscheinlichkeiten, die Kugel ein zweites Mal zu ziehen, nichts.

Das Ereignis E1: „Beide Kugeln zeigen die gleiche Farbe“ setzt sich wie folgt zusammen:

E1 $= \{(r,r),(b,b),(s,s)\}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E1 eintritt, ergibt sich als Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass beide Kugeln rot sind, beide blau oder beide schwarz.

Wir erhalten nach dem Pfadmultiplikationssatz: $P\big((b,b)\big)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}=36\ \%$, ferner

$P\big((r,r)\big)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{100}=9\ \%$, sowie $P\big((s,s)\big)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{100}=1\ \%$. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln die gleiche Farbe zeigen

$P(E1)=\frac{9}{25}+\frac{9}{100}+\frac{1}{100}=\frac{46}{100}=46\%.$

Das Ereignis E2: „Höchstens eine Kugel ist schwarz“ enthält alle möglichen Ausgänge des Zufallsversuches bis auf den Fall „beide Kugeln sind schwarz“ (da nur zwei Kugeln in der

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Kompakte Vorbereitung zu den zentralen Prüfungen Klasse 10

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de