

# SCHOOL-SCOUT.DE



Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Matrizen - geometrische Optik*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)



### Matrizen – geometrische Optik

von Axel Dengler



© Westfälische MedienTechnik

Die Mathematik ist ein sehr mächtiges und deshalb oft angewandtes Instrument der Mathematik. Komplexe mathematische Probleme lassen sich mit ihr übersichtlich lösen. Daher ist sie seit einigen Jahren – zumindest in den größeren Bundesländern – auch wieder Gegenstand der Abkürzung. In diesem Beitrag zeigen wir, wie sich die paraxiale Ausbreitung eines Lichtstrahls durch ein optisches System mithilfe der Matrizenrechnung übersichtlich beschreiben lässt. Man nennt das hier vorgestellte Verfahren Matrizenoptik. Es wird in der technischen Optik vielfach angewendet.

RAABE  
LEHRMATERIALIEN

# Matrizen – geometrische Optik

von Axel Donges



© Wavebreak Media/Thinkstock

Die Matrizenrechnung ist ein sehr mächtiges und deshalb oft angewandtes Instrument der Mathematik. Komplexe mathematische Probleme lassen sich mit ihr übersichtlich lösen. Daher ist sie seit einigen Jahren – zumindest in den größeren Bundesländern – auch wieder Gegenstand der Abiturprüfung. In diesem Beitrag zeigen wir, wie sich die paraxiale Ausbreitung eines Lichtstrahls durch ein optisches System mithilfe der Matrizenrechnung übersichtlich beschreiben lässt. Man nennt das hier vorgestellte Verfahren Matrizenoptik. Es wird in der technischen Optik vielfach angewendet.

# Matrizen – geometrische Optik

## Oberstufe (grundlegend)

von Axel Donges

---

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>M1–M15 Materialien</b>	<b>4</b>
<b>Lösungen</b>	<b>28</b>

---

### Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Matrizenrechnung in realen Anwendungsfällen kennen und wenden ihr bestehendes und neu erworbenes Wissen und Können in zahlreichen Aufgaben an. Die Jugendlichen erkennen den engen Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik auch im Teilbereich der Optik.

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

**AB** Arbeitsblatt

**TH** Theorie

**TA** Tafelanschrift

**FS** Formelsammlung

**MB** Merkblatt

**LEK** Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Was ist eine Matrix? – Kurz und bündig	M1	TH, TA
Rechnen mit Matrizen – was man wissen sollte	M2	TA, FS
Rechnen mit Matrizen – Übungsaufgaben	M3	AB
Optische Grundlagen – kurz und bündig	M4	TH
Strahlvektor und Transfermatrix	M5	TH
Transfermatrix der geradlinigen Ausbreitung	M6	TH, AB
Transfermatrix der Brechung an ebener Grenzschicht	M7	TH, AB
Transfermatrix der dünnen Linse	M8	TH
Transfermatrix eines optischen Systems	M9	TH
Transfermatrix eines optischen Systems – Übungen	M10	AB
Transfermatrix zweier dünner Linsen ohne Abstand	M11	TH, AB
Transfermatrix des astronomischen Fernrohrs	M12	TH, AB
Transfermatrix der optischen Abbildung durch eine Linse	M13	TH
Zusammenfassung Matrizenoptik – kurz und bündig	M14	MB
Sind Sie fit? – Lernerfolgskontrolle zur Matrizenoptik	M15	LEK

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Matrizenrechnung, Matrizenoptik, Lichtbrechung, Eingangs- und Ausgangsstrahl, Abstand und Winkel zur optischen Achse

**Medien:** TR, CAS

**Kompetenzen:** mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

## Didaktisch-methodische Hinweise

### Zielsetzung

Ziel der vorliegenden Materialien ist es, Ihre Schülerinnen und Schüler mit den Grundlagen der Matrizenrechnung und der geometrischen Optik vertraut zu machen, damit sie kleinere optische Systeme mit der **Matrizenoptik-Methode** beschreiben und berechnen können.

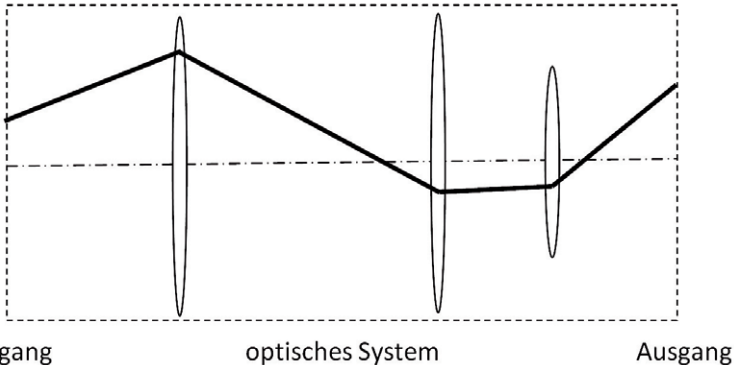


Abb. 1: Strahlengang durch ein optisches System (z. B. Mikroskop)

### Optisches System als Black Box

Ein geometrisch-optisches System besteht i. d. R. aus einer größeren Anzahl von Teilsystemen (siehe Abb. 1). So kann beispielsweise das **Objektiv einer Kamera** aus mehreren Linsen, die in definierten Abständen angeordnet sind, bestehen (siehe Abb. 2).

Sind alle Parameter des Objektivs bekannt, lassen sich die Eigenschaften des austretenden Lichtstrahls (Abstand zur optischen Achse, Austrittswinkel) berechnen, sofern die Eigenschaften des eintretenden Lichtstrahls (Abstand zur optischen Achse, Eintrittswinkel) bekannt sind (siehe Abb. 3).

Die Eigenschaften des Lichtstrahls (Abstand und Winkel zur optischen Achse) lassen sich zu einem in Material **M 5** genauer definierten **Strahlvektor**  $\vec{r}$  zusammenfassen.

Zwischen den Strahlvektoren  $\vec{r}_{\text{Eingang}}$  und  $\vec{r}_{\text{Ausgang}}$  am Ein- und Ausgang des optischen Systems besteht ein **linearer Zusammenhang**, der mathematisch mithilfe einer **Matrix** beschrieben werden kann:  $\vec{r}_{\text{Ausgang}} = \mathbf{M} \vec{r}_{\text{Eingang}}$ .

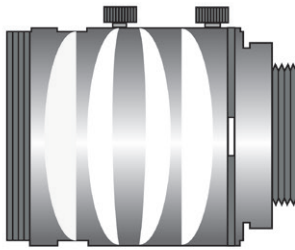


Abb. 2: Hochleistungsobjektive bestehen oft aus einer großen Anzahl optischer Elemente.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass sich die Matrix eines komplexen optischen Systems durch Multiplikation der Matrizen der optischen Teilsysteme berechnen lässt, wie in Material **M 9** gezeigt wird.

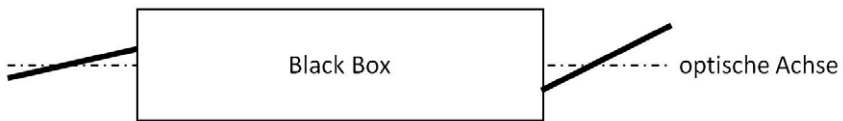


Abb. 3: Ein optisches System (z. B. ein Kameraobjektiv) als Black Box

### Lehrplanbezug

Die Brechung von Licht sowie die Wirkungsweise einer Linse sind in den schulischen Curricula fest verankert (Fach Physik). Die Matrizenrechnung gehört in die Sekundarstufe II. In mathematischen Leistungskursen wird sie beispielsweise im Anschluss an das Lösen von Gleichungssystemen oder die Vektorrechnung thematisiert. Dem bayrischen Lehrplan gemäß kann man Matrizen und Determinanten optional 14 Stunden lang behandeln.

<http://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/lernbereich/127849>

(aufgerufen am 01.11.2021)

In dem hier vorliegenden Beitrag wird ein anwendungsorientiertes, physikalisch motiviertes Beispiel zur Matrizenrechnung vorgestellt.

## Ablauf

In den Materialien **M 1** bis **M 3** werden die notwendigen **mathematischen Grundlagen** der Matrizenrechnung vorgestellt. Diese Materialien können ausgelassen werden, wenn Ihre Klasse entsprechende Kenntnis hat. Im Material **M 4** sind die notwendigen **optischen Kenntnisse** (Brechung von Licht, Linse) zusammengefasst. Auch dieses Material kann übersprungen werden, wenn die entsprechenden Kenntnisse vorhanden sind.

Im Material **M 5** werden die Grundbegriffe der sog. **Matrizenoptik** – die **Transfermatrix** und der **Strahlvektor** – eingeführt. Die Materialien **M 6–M 8** behandeln die wichtigsten Strahlmatrizen. Wie sich mit den zuvor bereitgestellten Strahlmatrizen komplexe optische Systeme berechnen lassen, wird im Material **M 9** gezeigt und im Material **M 10** geübt. Die Bearbeitung von **M 5** bis **M 9** ist unverzichtbar. Drei Beispiele werden in den abschließenden Materialien **M 11–M 13** vorgestellt. Mindestens ein Beispiel sollten Sie behandeln.

Mit Material **M 15** kann der Lernerfolg kontrolliert werden. Material **M 14** fasst zum Schluss die Methode der Matrizenoptik nochmals kurz zusammen.

## M 1 Was ist eine Matrix? – Kurz und bündig

**Merke:** Matrizen dienen der übersichtlichen Zusammenfassung von Informationen in einer tabellenartigen Struktur. Ein aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten bestehendes Zahlenschema

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

wird eine  **$m \times n$ -Matrix** (sprich:  $m$  kreuz  $n$  Matrix) genannt. Die einzelnen Zahlen  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ), die in der Matrix stehen, heißen **Matrix-Elemente**.

### Beispiel 1:

Die Verkaufszahlen einer Einzelhandelsfirma zeigt die folgende Tabelle:

	Waschmaschinen	Haartrockner	Rasierapparate	Radiogeräte
				
1. Quartal	37	102	67	33
2. Quartal	30	88	60	38
3. Quartal	31	97	39	15
4. Quartal	55	132	101	76

© RAABE 2022

Grafiken: iStock/Thinkstock

Man kann diese Informationen auch zu einer Matrix  $M$  zusammenfassen:

$$M = \begin{pmatrix} 37 & 102 & 67 & 33 \\ 30 & 88 & 60 & 38 \\ 31 & 97 & 39 & 15 \\ 55 & 132 & 101 & 76 \end{pmatrix}$$



# SCHOOL-SCOUT.DE



Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Matrizen - geometrische Optik*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)



### Matrizen – geometrische Optik

von Axel Dengen



© Westfälische MedienTechnik

Die Mathematik ist ein sehr mächtiges und deshalb oft angewandtes Instrument der Mathematik. Komplexe mathematische Probleme lassen sich mit ihr übersichtlich lösen. Daher ist sie seit einigen Jahren – zumindest in den größeren Bundesländern – auch wieder Gegenstand der Abkürzung. In diesem Beitrag zeigen wir, wie sich die paraxiale Ausbreitung eines Lichtstrahls durch ein optisches System mithilfe der Matrizenrechnung übersichtlich beschreiben lässt. Man nennt das hier vorgestellte Verfahren Matrizenoptik. Es wird in der technischen Optik vielfach angewendet.

RAABE  
LEHRMATERIALIEN